Chapitre V
Equations de Maxwell dans le Vide

December 17, 2014

Contents

Dans ce chapitre, nous considérons des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variant au cours du temps et nous étudions les lois fondamentales qui les régissent (equations de Maxwell). Nous donnons aussi quelques propriétés de ces champs et de leurs potentiels.

1 Du régime stationnaire au régime variable

1.1 Régime stationnaire

En absence de variation temporelle, le champ électrostatique $\vec{E}$ et magnétostatique $\vec{B}$ vérifient, dans tout repère gallileén, les relations locales suivantes

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} & , & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ rot \vec{E} = 0 & , & rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \tag{1.1}$$

ϱ et $\vec{j}$ sont respectivement les densités statiques de charges et de courants de conduction. Les formes integrales associées aux eqs(1.1) sont

$$\begin{array}{llll} \iint_{S=\partial\mathcal{V}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} & = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} & : & \text{th de Gauss} \\ \oint_{C=\partial\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dl} & = 0 & & \\ & & & \\ \iint_{S=\partial\mathcal{V}} \vec{B}.\overrightarrow{dS} & = 0 & & \\ \oint_{C=\partial\Sigma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} & = \mu_0 I & : & \text{th d'Ampère} \end{array}$$

avec

$$Q_{int} = \iiint_{\mathcal{V}} \varrho d^2\tau, \qquad I = I_{enlacés} = \iint_{\Sigma} \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

1.2 Régime variable

a) *Les 4 équations locales de Maxwell*

En régime variable, nous avons

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0} \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

soit des champs et des densités dépendents des points de l'espace- temps

$$\vec{E} = \vec{E}\,(M,t) \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}\,(M,t)$$

les équations locales (1.1) des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ changent et deviennent couplées comme le montre les relations suivantes connues sous l'appelation d'équation de Maxwell:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{\nabla}.\vec{E} & = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} & : \text{ loi de Maxwell- Gauss} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} & = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & : \text{ loi de Maxwell- Faraday} \\ \vec{\nabla}.\vec{B} & = 0 & : \text{ loi de Maxwell- Thompson} \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B} & = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & : \text{ loi de Maxwell- Ampere} \end{array}} \qquad (1.2)$$

avec $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ où $c = 3\times10^8\mathrm{m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et le terme

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

est la densité volumique du courant de déplacement.

b) *equations intégrales*

Les formes intégrales associées aux 4 eqs de Maxwell (1.2) sont

$$\boxed{\begin{array}{llll} \iint_{S=\partial\mathcal{V}}\vec{E}.\overrightarrow{dS} & = & \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} & : \text{ th de Gauss} \\ \oint_{C=\partial S}\vec{E}.\overrightarrow{dl} & = & -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = e(t) & : \text{ induction électromagnétique} \\ \iint_{S=\partial\mathcal{V}}\vec{B}.\overrightarrow{dS} & = & 0 & : \text{ flux } \Phi_B = 0 \\ \oint_{C=\partial S}\vec{B}.\overrightarrow{dl} & = & \mu_0\left(I_{enlacés} + I_D\right) & : \text{ th d'Ampère généralisé} \end{array}}$$

avec

$$I_D = \iint_S \vec{j}_D.\overrightarrow{dS} = \varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Remarquons que les équations du régime statique (1.1) sont recouvertes en ignorant la variation temporelle.

2 Propriétés du champ EM

2.1 *conservation de la densité de charge ϱ*

La relation de conservation de la densité de charge est donnée par

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \;=\; 0 \tag{2.1}$$

Elle s'ensuit des eqs de Maxwell; en effet à partir de (1.1) et de la propriété

$$\operatorname{div}\left(rot\vec{B}\right) = 0 = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{j} &= -\varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ce qui mène (2.1).

2.2 *relations de passage de $(\vec{E},\vec{B})$*

Les relations de passage des champs électrique et magnétique du cas statique restent valables aussi dans le cas du régime variables.

A la traversée d'un surface Σ de densité de charge σ et de courant $\vec{j}_S$, les champs $(\vec{E},\vec{B})$ des régions 1 et 2 de part et d'autre de la surface de séparation sont reliés comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{//}(M_2) - \vec{E}_{//}(M_1) &= \vec{0} \\ \vec{E}_{\perp}(M_2) - \vec{E}_{\perp}(M_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \quad , \quad \text{discontinueté} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{//}(M_2) - \vec{B}_{//}(M_1) &= \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \quad , \quad \text{discontinueté} \\ \vec{B}_{\perp}(M_2) - \vec{B}_{\perp}(M_1) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Sous forme condensée

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \\ \vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) &= \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}}$$

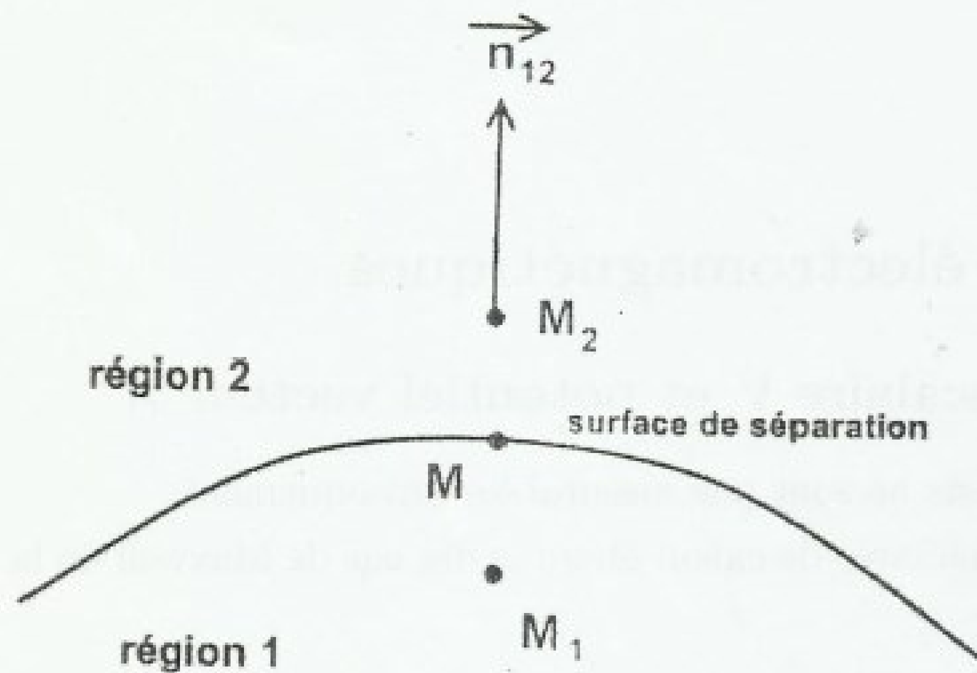


Figure 1: *relation de passage des champs* $\vec{E}$ et $\vec{B}$

2.3 Approximation des régimes quasi-stationnaires

A cause des couplages entre champ $\vec{E}$ et champ $\vec{B}$, les régimes variables sont nettement plus complexes à étudier que les régimes stationnaires.
Si les champs *ne varient pas trop vite*, on peut utliser quelques approximations pour simplifier les calculs.
Dans l'approximation *quasi-stationnaire*, on réduira la relation

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

à celle de la magnétostatique

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

ce qui revient à:
i) ignorer la variation temporelle du champ électrique

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \simeq \vec{0}$$

ii) calcuer $\vec{B}$ par le théorème d'ampère comme dans la magnétostatique

3 Potentiels électromagnétiques

3.1 Potentiels scalaire V et potentiel vecteur $\vec{A}$

Ces champs de potentiels ne sont pas mesurables physiquement;
ce sont donc des intérmédiares de calcul obtenus des eqs de Maxwell de la facon suivante:

a) *potentiel vecteur* $\vec{A}$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = rot\ \vec{A}$$

il est exprimé en $Tesla \times metre$ (Tm). Le potentiel vecteur n'est pas unique

$$rot\vec{A} = rot\left(\vec{A} + \mathrm{grad}\, f\right), \quad \forall f$$

ce qui le rend non mesurable comme mentionné ci-dessus.

b) *potentiel scalaire V*

De la relation

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

il en découle

$$\boxed{\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Par ailleurs, vu que

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \mathrm{grad}\, f, \quad \forall f$$

on doit avoir

$$V \sim V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Les 2 potentiels V et $\vec{A}$ ne sont donc pas unique puisqu'ils sont définis à un arbitraire f près.

c) *choix de jauge*

Vu l'indétermination de V et $\vec{A}$, on impose souvent une condtion sur ces potentiels; les plus utilisées sont:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} & = 0 & , \quad \text{jauge de Lorentz} \\ \mathrm{div}\,\vec{A} & = 0 & , \quad \text{jauge de Coulomb} \end{array}}$$

3.2 Equations de Laplace

a) *Equations de V et $\vec{A}$ dans la jauge de Lorentz*

En remplacant les expressions du champ EM en fonction des potentiels V et $\vec{A}$, les eqs de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned} \Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) &= -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\left(\text{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \text{grad}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Dans la jauge de Lorentz, on peut remplacer

$$\text{div}\,\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

ce qui mène aux équations de Laplace pour les potentiels

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V - \frac{\partial^2 V}{c^2 \partial t^2} &= -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{c^2 \partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

avec les densités de charge et de courants

$$\begin{cases} \varrho = \varrho\,(P,t) \\ \vec{j} = \vec{j}\,(P,t) \end{cases} \quad \text{si } P \in \mathcal{V}$$

et

$$\begin{cases} \varrho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{si } P \notin \mathcal{V}$$

A l'exterieur de $\mathcal{V}$, les équations de V et $\vec{A}$ coincident avec les équations de propagation usuelle

$$\Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{c^2 \partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

b) *solution à symetrie spherique*

Dans le cas ou l'on cherche des solutions à symetrie spherique des equations des potentiels loin des charges et des courants, on écrire (3.1) en coordonnées spheriques.

$$\Psi = \Psi\,(r, \theta, \varphi).$$

Dire que la solution est à symetrie spherique, c'est dire que Ψ est indépendante des angles θ et φ; càd $\Psi = \Psi(r)$. Par conséquent, le laplacien se réduit à

$$\boxed{\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}}$$

avec

$$\Phi = r\cdot\Psi$$

En remplacant dans (3.1), on a:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\Phi}{c^2\partial t^2} = 0$$

qu'on peut factoriser comme

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{c\partial t}\right)\Phi = 0}$$

et dont la solution générale est donnée par

$$\Phi = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

où $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ est une onde progressive, $g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ est une onde régressive et $\tau = \frac{r}{c}$ le temps de propagation du point source P au point M.
En 2 points (t_1, r_1) et (t_2, r_2) d'espace-temps differents avec

$$t_1 - \frac{r_1}{c} = t_2 - \frac{r_2}{c}$$

on tire

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{c}(r_2 - r_1) \Rightarrow \begin{cases} \text{progressive } (r_2 > r_1) \;\; si \;\; t_2 > t_1 \\ \text{regressive } (r_2 < r_1) \;\; si \;\; t_2 < t_1 \end{cases}$$

3.3 potentiels retardés

Dans le cas d'un milieu infini, l'onde réfléchie est nulle, d'où

$$\begin{aligned} \Psi(r,t) &= \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \\ &\simeq \frac{f(t)}{r} - \frac{1}{c}f'(t) \text{ dans le cas } \frac{r}{c} << 1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\varrho(t)}{4\pi\varepsilon_0} &&: \text{ cas scalaire} \\ \vec{f}(t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(t) &&: \text{ cas vectoriel} \end{aligned}$$

Ainsi, les densités de potentiels scalaire et vecteur en régime quasi-stationnaire sont alors

$$\frac{dV(t,M)}{d^3\tau} = \frac{\varrho\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\frac{d\vec{A}(t,M)}{d^3\tau} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

soit, par integration sur les distributions de charges et de courants, on obtient les potentiels retardés, créés au point P à l'instant $\left(t-\frac{r}{c}\right)$ et arrivant au point M à l'instant t avec un retard de $\frac{r}{c}$.

$$V(t,M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varrho\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} d^3\tau$$

$$\vec{A}(t,M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{j}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} d^3\tau$$

4 Energie électromagnétique

4.1 Densité et courant d'énergie électromagnétique

a) *densité d'énergie*

Les régions où est localisé le champ $(\vec{E},\vec{B})$ contiennent une énergie éléctromagnétique dont la densité volumique $u = u(M)$ est donnée par

$$u = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

L'unité de u est $Joules/m^3$.

b) *vecteur de Poynting*

Ce vecteur donné par

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \qquad \text{en Watts/m}^2$$

est défini en tout point M de l'espace ou existe un champ életcromagnétique.
Son flux à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ soit égal à la puissance électromagnétique $\mathcal{P}_{ray}$ traversant $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint_{S} \vec{R}.\overrightarrow{dS}$$

4.2 Conservation de l'énergie en régime variable

a) *equation de conservation*

L'énergie éléctromagnétique contenue dans un volume $\mathcal{V}$ varie de 2 facons:

- énergie u_1 qui entre ou qui sort au travers de la surface $\mathcal{S}$ délimitant $\mathcal{V}$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \text{div}\,\vec{R} = 0$$

- énergie u_2 échangée avec les charges contenues dans le volume $\mathcal{V}$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

Les variations de $u_1 + u_2 = u$ donnent localement l'equation de conservation suivante

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}\,\vec{R} + \vec{j}.\vec{E} = 0} \qquad (4.1)$$

Pour le volume fini $\mathcal{V}$, cette relation devient:

$$\frac{dU}{dt} = -\iint_{S} \vec{R}.\overrightarrow{dS} - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}.\vec{E}$$

avec

$$U = \iiint_{\mathcal{V}} u\,(M)\,d\tau$$

b) *preuve de la relation (4.1)*

On part des eqs de Maxwell suivantes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

Puis on multiplie scalairement la première equation par $\vec{B}$ et la deuxième equation par $\vec{E}$; on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= - \quad \vec{B}.\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \quad \mu_0 \vec{E}.(\vec{j} + \varepsilon_0 \tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

qu'on peut également écrire comme

$$\begin{aligned} \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} \\ \vec{E}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 \vec{j}.\vec{E} + \tfrac{\mu_0 \varepsilon_0}{2}\tfrac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}) \end{aligned}$$

Retranchons membre à membre ces 2 relations,

$$\vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \left[\vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)\right]$$

et utilisons l'identité

$$\vec{\nabla}.(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

pour la ramener à

$$\vec{\nabla}.\vec{R} = -\vec{j}.\vec{E} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} && , \quad \text{vecteur de Poynting} \\ u &= \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} && , \quad \text{densité d'énergie em} \end{aligned}$$